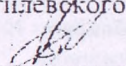


УТВЕРЖДАЮ

Начальник главного управления  
по образованию  
Могилевского облисполкома

  
А.Б.Заблотовский  
« 3 » ноября 2022 г.

### ЗАДАНИЯ

для проведения второго этапа республиканской олимпиады  
по учебному предмету «Математика»

Дата проведения: 26 ноября 2022 г.

Время выполнения заданий: 10.00 – 15.00.

### IX класс

1. Доказать, что для любого натурального  $n$  справедливо неравенство:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4} + \frac{4}{5}\right)\left(\frac{5}{6} + \frac{6}{7}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{2n-1}{2n} + \frac{2n}{2n+1}\right) > \frac{2^n}{\sqrt{2n+1}}.$$

2. Через точку  $A$  на оси абсцисс ( $A$  не совпадает с началом координат) проведена прямая, пересекающая параболу  $y = x^2$  в точках  $B$  и  $C$ , а ось ординат в точке  $D$ . Доказать, что  $AB \cdot AC = AD^2$ .

3. Решить уравнение  $20\{x\} + 22 \cdot [x] = 2022$ .

*Примечание.*

$[x]$  – это наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ .

$\{x\}$  называется *целой частью числа  $x$* .

Например,  $[5,2] = 5$ ,  $[7] = 7$ ,  $[-3,1] = -4$ .

$\{x\} = x - [x]$ ,  $\{x\}$  – называется *дробной частью числа  $x$* .

Например,  $\{5,2\} = 0,2$ ,  $\{7\} = 0$ ,  $\{-3,1\} = 0,9$ .

4. Диагонали трапеции  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$  ( $AD > BC$ ) пересекаются в точке  $O$ . Окружность  $w_1$ , проходящая через точки  $O$  и  $A$ , касается стороны  $AD$  в точке  $E$ . Окружность  $w_2$ , проходящая через точки  $O$  и  $D$ , касается стороны  $AD$  в точке  $F$ . Окружности  $w_1$  и  $w_2$  второй раз пересекаются в точке  $T$ . Доказать, что прямая  $OT$  делит сторону  $BC$  пополам.

5. В гостях у короля Артура за круглым столом сидят 5 рыцарей: Айвенго, Дон Кихот, Ланселот, Роланд и Ричард Львиное Сердце. Король Артур желает каждому рыцарю подарить шлем. У короля Артура есть шлемы трех видов: золотые, серебряные и бронзовые. Сколькими способами Артур может подарить рыцарям шлемы так, чтобы любые два рыцаря, сидящие по соседству, получили шлемы из разных металлов? (У каждого рыцаря за круглым столом имеется два соседа).

Пользоваться калькулятором не разрешается

1. Решение:

Применяя к каждому множителю левой части неравенство Коши:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} > 2\sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}}, \quad \frac{3}{4} + \frac{4}{5} > 2\sqrt{\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}}, \quad \frac{5}{6} + \frac{6}{7} > 2\sqrt{\frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7}},$$

$$\frac{2n-1}{2n} + \frac{2n}{2n+1} > 2\sqrt{\frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n}{2n+1}}.$$

(все неравенства строгие, поскольку в левой части каждого неравенства слагаемые не равны).

Перемножив левые и правые части данных неравенств, получим:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) \left(\frac{3}{4} + \frac{4}{5}\right) \left(\frac{5}{6} + \frac{6}{7}\right) \cdots \left(\frac{2n-1}{2n} + \frac{2n}{2n+1}\right) &> 2 \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}} \cdot 2 \sqrt{\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}} \cdots 2 \sqrt{\frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n}{2n+1}}, \\ \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) \left(\frac{3}{4} + \frac{4}{5}\right) \left(\frac{5}{6} + \frac{6}{7}\right) \cdots \left(\frac{2n-1}{2n} + \frac{2n}{2n+1}\right) &> 2^n \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n}{2n+1}}, \\ \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) \left(\frac{3}{4} + \frac{4}{5}\right) \left(\frac{5}{6} + \frac{6}{7}\right) \cdots \left(\frac{2n-1}{2n} + \frac{2n}{2n+1}\right) &> 2^n \sqrt{\frac{1}{2n+1}} \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

2. Решение:

Обозначим через  $\alpha$  угол между прямой  $AB$  и положительным направлением оси абсцисс.

Пусть точки  $K, O, M$  — проекции точек  $B, D, C$  на ось абсцисс соответственно.

Тогда  $AB = \frac{AK}{\cos \alpha}$ ,  $AC = \frac{AM}{\cos \alpha}$ ,  $AD = \frac{AO}{\cos \alpha}$ .

Тогда равенство  $AB \cdot AC = AD^2$  примет вид:

$$\frac{AK}{\cos \alpha} \cdot \frac{AM}{\cos \alpha} = \frac{AO^2}{\cos^2 \alpha} \text{ или } AK \cdot AM = AO^2.$$

Итак, нам достаточно доказать, что  $AK \cdot AM = AO^2$ .

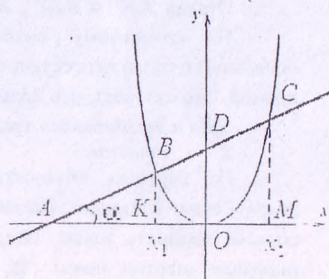
Пусть абсцисса точки  $A$  равна  $a$ . Уравнение прямой  $AB$  имеет вид:  $y = kx + b$ . Поскольку точка  $A(a; 0)$  принадлежит данной прямой, то  $0 = ka + b$ , откуда  $b = -ka$  и уравнение прямой  $AB$  примет вид:  $y = kx - ka$ . Абсциссы точек  $K$  и  $M(x_1 \text{ и } x_2)$  являются корнями уравнения  $x^2 = kx - ka$  или  $x^2 - kx + ka = 0$ .

По теореме Виета  $x_1 + x_2 = k$ ,  $x_1 \cdot x_2 = ka$ .

Пусть точка  $A$  расположена левее начала координат (в другом случае рассуждения будут аналогичны), т.е.  $a < 0$ . Тогда  $AK = x_1 - a$ ,  $AM = x_2 - a$ ,  $AO = |a|$ .

$$AK \cdot AM = (x_1 - a)(x_2 - a) = x_1 \cdot x_2 - ax_1 - ax_2 + a^2 = x_1 \cdot x_2 - a(x_1 + x_2) + a^2 =$$

Что и требовалось доказать.





### 3. Решение:

Заметим, что  $x = [x] + \{x\}$ . Выполним преобразования:

$$20[x] + 22 \cdot \{x\} = 2022;$$

$$10[x] + 11 \cdot \{x\} = 1011; \quad (1)$$

$$10[x] = 1011 - 11 \cdot \{x\};$$

$$[x] = 101,1 - 1,1 \cdot \{x\};$$

Поскольку  $0 \leq \{x\} < 1$ , то  $0 \leq 1,1 \cdot \{x\} < 1,1$  и  $100 < 101,1 - 1,1 \cdot \{x\} \leq 101,1$ .

Отсюда  $100 < [x] \leq 101,1$ . Поскольку  $[x]$  целое число, то  $[x] = 101$ . Подставим это значение

в (1):  $10 \cdot 101 + 11 \cdot \{x\} = 1011,$

$$11 \cdot \{x\} = 1,$$

$$\{x\} = \frac{1}{11}.$$

Тогда  $x = 101 + \frac{1}{11} = 101\frac{1}{11}.$

Ответ:  $101\frac{1}{11}.$

### 4. Решение:

Окружности  $w_1$  и  $w_2$  пересекаются в точках  $O$  и  $T$ .

Пусть точка  $K$  – точка пересечения прямых  $TO$  и  $AD$ .

Докажем, что  $K$  – середина стороны  $AD$ .

По свойству касательной и секущей имеем:

$$KO \cdot KT = KA^2, \quad KO \cdot KT = KD^2.$$

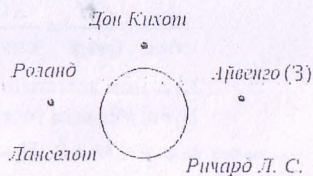
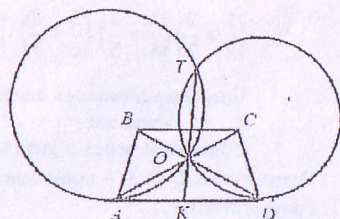
Откуда  $KA^2 = KD^2, \quad KA = KD.$

По известному свойству трапеции, середины оснований и точка пересечения диагоналей лежат на одной прямой. Это означает, что прямая  $OT$  делит сторону  $BC$  пополам.

*Что и требовалось доказать.*

### 5. Решение:

Не нарушая общности рассуждений, положим, что рыцари сидят в порядке, указанном на рисунке. Существует три способа подарить шлем, например, Айвенго. Пусть Айвенго подарил золотой шлем (3). Рассмотрим рыцаря Ланселота, сидящего через одного от Айвенго.



1) Если Ланселоту подарили такой же шлем, как и Айвенго (золотой), то Ричарду можно сделать подарок двумя способами (бронзовый или серебряный шлем), Дон Кихоту можно подарить шлем также двумя способами. Роланду можно подарить шлем одним способом – его шлем должен отличаться от шлемов Дон Кихота и Ланселота. В этом случае общее число способов подарить шлемы составит  $2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ .

2) Пусть теперь Ланселоту подарили шлем, отличный от шлема Айвенго (серебряный или бронзовый). Положим, Ланселоту подарили серебряный шлем. Ричарду можно сделать подарок одним способом (бронзовый шлем), Дон Кихоту можно подарить серебряный или бронзовый шлем. Если ему подарить серебряный шлем, то Роланду можно дарить золотой или бронзовый шлем (т.е. 2 способа). Если Дон Кихоту подарили бронзовый шлем, то Роланду нужно дарить только золотой шлем (1 способ). Итак, если у Ланселота серебряный шлем, то Дон Кихот и

Роланда можно одарить  $2+1=3$  способами. Столько же способов будет, если у Ланселота бронзовый шлем. Всего способов будет  $3+3=6$ .

Итак, если у Айвенго золотой шлем, то остальных рыцарей можно одарить  $4+6=10$  способами. По столько же способов получим, если у Айвенго будет серебряный или бронзовый шлем. Всего способов будет  $10 \cdot 3=30$  способов.

*Ответ: 30 способов.*